tsirivras@uoc.gr

Πραγματική Ανάλυση 09-10-17

Έχουμε σύγκλιση ακολουθίας $a_n \to a$ και σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων σε συνάρτηση $f_n \to f$.

Προκύπτει το ερώτημα $\int_a^b f_n(x_n)dx \xrightarrow{?} \int_a^b f(x)dx$

(συγκλίνει;)

Έστω Π ορθογώνιο και έχουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy \quad , \Pi = [a,b]\times[\gamma,\delta]$$

Έχουμε και το ολοκλήρωμα $\int_{A} f\,d\mu$

Για να περιγράψουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue αρκεί να περιγράψουμε τα σύνολα. Τα σύνολα τύπου A ονομάζονται Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.
Γενικά, σύνολα ομαλής μορφής (ομαλές καμπύλες) είναι Lebesgue μετρήσιμα. Σ' αυτά μπορώ να προσδιορίσω όγκους και παραγώγους.
Πολλές φορές, το ολοκλήρωμα Lebesgue ταυτίζεται με το Rieman.
(μέτρο Lebesgue, μετρήσιμες συναρτήσεις) → πρώτα 2 κεφάλαια.

<u>ορισμός Άλγεβρας Συνόλων</u>: Έστω X να είναι ένα σύνολο, ορίζεται το $P(X)$ (δυναμοσύνολο του X, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X)
Εάν $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ ονομάζεται άλγεβρα αν ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες
i) $X \in \mathcal{A}$ (X σύνολο)
ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X - A = A^c \in \mathcal{A}$

iii) Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

Παρατηρήσεις.

(1) $\phi \in \mathcal{A}$, γιατί $X \in \mathcal{A}$ (από το (i)) και για $A = X$ το $X \setminus X = \phi \in \mathcal{A}$ (από το (ii))

(2) Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ (για $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) τότε το σύνολο
$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

Απόδειξη 2

Με επαγωγή: Για $n=2$ είναι το (iii) του ορισμού

Έστω ότι ισχύει για κάποιο k, $k \geq 2$

Θα το δείξουμε για $k+1$: $\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i = \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{A_{k+1}}_{\in \mathcal{A}} \in$

$\in \mathcal{A}$, από την (iii) του ορισμού.

από υπόθεση

$\square$

(3) Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

Απόδειξη: (Χρησιμοποιώ De Morgan)

$$A_1 \cup A_2 = (A_1^c)^c \cup (A_2^c)^c = \bigcup_{i=1}^{2} A_i^c \overset{(ii)}{=} \left(\bigcap_{i=1}^{2} A_i^c\right)^c = (A_1^c \cap A_2^c)^c$$

(iii) άλγεβρας $A_1^c \cap A_2^c$ αφού $A_1^c \in \mathcal{A}$, $A_2^c \in \mathcal{A}$

$A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1^c, A_2^c \in \mathcal{A}$ Επομένως $(A_1^c \cap A_2^c)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

και από το (iii) άλγεβρας $X \setminus (A_1^c \cap A_2^c) = (A_1^c \cup A_2^c) \in \mathcal{A}$.

<u>Κανόνες De Morgan</u>: Έστω X σύνολο και

$A_1, A_2, \dots A_n$ υποσύνολα του X, τότε ισχύουν:

(i) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$

(ii) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$

$$\boxed{\begin{aligned} A_i^c &= X - A_i \\ A &= X - (X - A) \\ A &= (A^c)^c \end{aligned}}$$

Σχόλιο ?

<u>Παρατήρηση 3</u> Αν $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

<u>Απόδειξη</u>: $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) = A \cap B^c$

Αφού, $B \in \mathcal{A}$ άρα το $X \setminus B \in \mathcal{A}$ από το (ii) και από το (iii) αφού A και $X \setminus B \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{A \cap (X \setminus B)}_{A \setminus B} \in \mathcal{A}$

□

~~#~~ Άσκηση 1 #

Αν $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{A}$ για $n = 1, \dots n \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Άσκηση 2

Η ιδιότητα (1) του ορισμού μπορεί να αντικατασταθεί με την ιδιότητα ότι το $\phi \in \mathcal{A}$ ή με την ιδιότητα ότι το $\mathcal{A} = \phi$

<u>Παράδειγμα Αλγεβρών</u>

(i) Έστω τυχόν σύνολο X. Τότε, το σύνολο $\{\phi, X\}$ είναι μια άλγεβρα στο X η μικρότερη.

(ii) Έστω τυχόν σύνολο X. Τότε, το $P(x)$ είναι μια άλγεβρα στο X η μεγαλύτερη.

ακρ-αίες

Συνεκτικά, φραγμένα διαστήματα με $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$:
$[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b)

Έστω $A, B \in \mathbb{R}$, $A \subset B$. Θέτουμε $[A,B] = \Delta$. Ορίζουμε το σύνολο:

$A_1 = \{ C \subseteq \Delta \mid$ ένα πεπερασμένο πλήθος από ξένα από δύο φραγμένα διαστήματα $C_1, C_2, \dots, C_n$ τω

$C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ ή το C είναι το ίδιο ένα φραγμένο

διάστημα ή $C = \varnothing \}$

Θ.δ.ο το A_1 είναι μια άλγεβρα.

<u>Πρόταση</u>: Το A_1 είναι μια άλγεβρα στο Δ (δεν θα κάνουμε απόδειξη αλλά θα την περιγράψουμε)

$[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = [a_2, b_1]$: $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$

Είναι προφανές ότι η <u>τομή</u> δύο φραγμένων διαστημάτων ανήκει στο A_1.
(και η ένωση είναι προφανές ότι ανήκει στην οικογένεια A_1)

Το $\Delta \in A_1$ ∇.δ. ∇. το (1) του ορισμού

Έχουμε $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, $C' = \bigcup_{i=1}^{m} C'_i$

<u>Ιδιότητα συνολοθεωρητική</u>

Έστω $A_1, A_2, \dots A_n$, $B_1, B_2, \dots B_m$, $n, m \in \mathbb{N}$ υποσύνολα ενός συνόλου X.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (A_i \cap B_j)$$

Άρα, έχουμε $C\cap C' = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m} C_j'\right) = \bigcup_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} (C_i\cap C_j')$

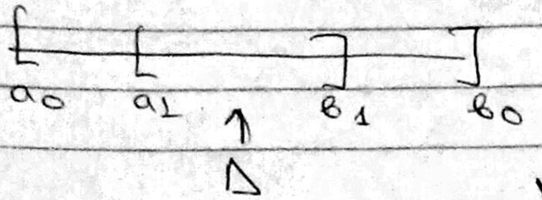
είναι διαστήματα

είναι $C_{i_1}\cap C'_{j_1}$, $C_{i_2}\cap C'_{j_2}$

$(C_{i_1}\cap C'_{j_1})\cap(C_{i_2}\cap C'_{j_2}) =$

$= \underbrace{(C_{i_1}\cap C_{i_2})}_{=\emptyset}\cap\underbrace{(C'_{j_1}\cap C'_{j_2})}_{=\emptyset} = \emptyset$

Άρα, τομή δύο οποιοδήποτε συνόλων C, C' από την οικογένεια, ανήκει στην οικογένεια: $C\cap C'\in A$, την (iii) του ορισμού.



$I=[a_1,b_1]$, $\Delta\setminus I = [a_0,a_1)\cup(b_1,b_0]\in A_1$

Παρόμοια για τυχόν φραγμένο διάστημα έχουμε ότι $\Delta\setminus I\in A_1$

$\Delta\setminus I = \{a_0\}\cup(b_1,b_0)$ το (iii) του ορισμού

Έχουμε δείξει ότι $C\in A_1$, $C=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$, $n\geq 2$, $\Delta\setminus C\in A_1$. Ας υπολογίσουμε το $\Delta\setminus C$

$\Delta\setminus C = \Delta\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)^c \underset{\text{De Morgan}}{=} \bigcap_{i=1}^{n} C_i^c$

Τα C_i, $i=1,2,\ldots$ είναι φραγμένα διαστήματα και άρα από το προηγούμενο τα C_i^c είναι η ένωση 2 φραγμένων διαστημάτων ή ένα φραγμένο διάστημα ή το $\emptyset$. Οπότε, $C_i^c = C_{1,i}\cup C_{2,i}$, όπου τα $C_{1,i}, C_{2,i}$ είναι φραγμένα διαστήματα ξένα μεταξύ τους.

Άρα, $\Delta\setminus C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} (C_{1,i}\cup C_{2,i})$

Άρα, θα πάρουμε:

$(C_{1,1}\cup C_{2,1})\cap(C_{1,2}\cup C_{2,2}) \overset{*}{=}$

$=\bigcup\Big((C_{1,1}\cap C_{1,2})\cup(C_{1,1}\cap C_{2,2})\cup(C_{2,1}\cap C_{1,2})\cup$

$\cup(C_{2,1}\cap C_{2,2})\Big)$

όλα αυτά είναι τομές 2 φραγμένων διαστημάτων άρα φραγμένο διάστημα.

Άρα, έχουμε ένωση φραγμένων συνόλων ξένων ανά 2, άρα φραγμένο διάστημα.

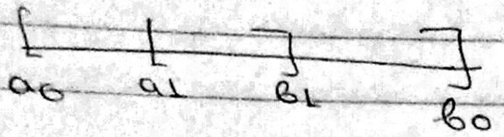
Άρα, έχουμε ένωση φραγμένων συνόλων ξένων ανά 2.

Επομένως, η τομή A_1: $\Delta \setminus C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} (C_{1,i} \cup C_{2,i}) \in A_1$ και επαγωγικά προκύπτει $\forall n$ για $n \geq 2$ ισχύει και η (iii) άρα το A_1 είναι άλγεβρα $\square$

Επεξήγηση στην απόδειξη

$a_0 < a_1 < b_1 < b_0$ $\quad I = [a_1, b_1]$

$\Delta = [a_0, b_0]$



$\Delta \setminus I = \underbrace{[a_0, a_1)}_{C_1} \cup \underbrace{(b_1, b_0]}_{C_2} = C$ και τα 2 φραγμένα ξένα μεταξύ τους

Άρα, $C = C_1 \cup C_2$ γράφεται έτσι. Το ίδιο ισχύει και για διαφορετικά διαστήματα

Αν $I' = [a_0, b_1]$, $\Delta \setminus I' = (b_1, b_0]$ ένα φραγμένο διάστημα

Αν $I'' = (a_0, b_1]$, $\Delta \setminus I'' = [\underbrace{\{a_0\}}_{C_1} \cup \underbrace{(b_1, b_0]}_{C_2}]$ ένα μονοσύνολο κι ένα φραγμένο σύνολο

το μονοσύνολο είναι φραγμένο

Άρα, πάλι ένωση 2 φραγμένων.

Αν $I''' = (a_0, b_0)$, $\Delta \setminus I''' = \{a_0, b_0\} = \underbrace{\{a_0\}}_{C_1} \cup \underbrace{\{b_0\}}_{C_2}$, άρα

ένωση δύο φραγμένων διαστημάτων

Αν έχω όμως $C_1, C_2, \ldots, C_n$ αντί για μοναδιαίο C

έχω: $C_1 = C_{1,1} \cup C_{1,2}$

$C_2 = C_{2,1} \cup C_{2,2}$

Έστω $a, β, γ, δ$ με $a<β$, $γ<δ$

$I = [a,β] \times [γ,δ]$

Θεωρούμε τα διαστήματα του $\mathbb{R}^2$ της μορφής $I_1 \times I_2$ (όπου I_1, I_2 φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$) → και επιτρέπεται και να είναι μονοσύνολο.

• $(a,β] \times [γ,δ]$ ή $(a,β] \times [γ,δ]$ ή $(a,β) \times (γ,δ)$ κλπ... όλες τις μορφές.

Όλα αυτά θα τα ονομάζουμε διαστήματα του $\mathbb{R}^2$.

$A, B \subseteq X$

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ και $b \in B\}$ } ιδιότητες

$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

Άρα με βάση τα παραπάνω: $[a,β] \times [γ,δ] =$

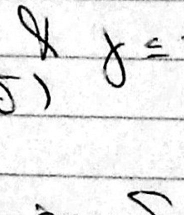
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le β$ & $γ \le y \le δ\}$

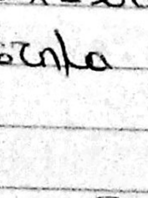
$(a \le β, γ \le δ)$

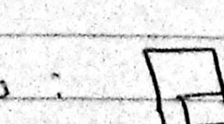
Θα έχουμε μ' αυτά:

$A_2 = \{C \subseteq Δ \mid$ το C είναι ένα διάστημα $\mathbb{R}^2$ ή είναι ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους σχεδόν ξένων ανά δύο διαστημάτων του $\mathbb{R}^2$ ή είναι το $\varnothing\}$

Τα εσωτερικά σημεία (x,y) του $Δ$ είναι όλα τα (x,y) για τα οποία $a_0 < x < β_0$, $γ_0 < y < δ_0$ και για οποιοδήποτε άλλο διάστημα ορίζουμε τα εσωτερικά του σημεία.

Σχεδόν ξένα ανά δύο: 

όχι ξένο: 

ξένα: 

Σχεδόν ξένα: Δύο διαστήματα του Δ_1, Δ_2 του $\mathbb{R}^2$ θα

λέμε ότι είναι σχεδόν ξένα εάν δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο.

Πρόταση: $(X, \mathcal{A})$ Η $\mathcal{A}_2$ είναι άλγεβρα στο Δ.